Задача Коши для ОДУ 1-го порядка

ОДУ 1-го порядка имеет вид:

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

Здесь f – заданная функция:

$$f \in C(D),\ D \in \mathbb{R}^2 \tag{2}$$

Пусть дано начальное условие:

$$y(x_0) = y_0,\ (x_0, y_0) \in D \tag{3}$$

Задача Коши состоит в нахождении частного решения ОДУ (1), которое удовлетворяло бы начальному условию, т.е. найти $y = y(x)$, такую, что:

$$y' = f(x, y) \tag{4}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{5}$$

Если $y = y(x)$ – решение (1), то график этого решения называется интегральной кривой.

Геометрическая интерпретация задачи Коши: найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку.

Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши (ТСЕ):

Пусть функция $f(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна в области $D \in \mathbb{R}^2$. Тогда $\forall (x_0, y_0) \in D$:

1) $\exists$ окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, в которой имеется решение $y = y(x)$ задачи Коши.

2) Если $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ – два решения задачи Коши, то $y_1(x) = y_2(x)$ в некоторой окрестности точки x_0.