Закон Кирхгофа, Стефана-Больцмана и закон смещения Вина

Поток энергии, испускаемый единицей поверхности тела, излучающей волну частоты ω обозначается как $dR_\omega = r_\omega d\omega$.

При малом $d\omega$ он пропорционален ей:

$$dR_\omega = r_\omega d\omega \tag{1}$$

Коэф. пропорциональности называется испускательной способностью тела. Она зависит от температуры ($r_{\omega T}$).

Энергетическая светимость (полная плотность потока для всевозможных частот) тела равна:

$$R_T = \int dR_{\omega T} = \int_0^\infty r_{\omega T} d\omega \tag{2}$$

Воспользовавшись переходом от частоты к длине волны $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$; $d\lambda = -\frac{2\pi c}{\omega^2} d\omega = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} d\omega$, можно переписать выражение для светимости:

$$dR_\lambda = r_\lambda d\lambda, \ \text{ причем } \ r_\omega = r_\lambda \frac{2\pi c}{\omega^2} = r_\lambda \frac{\lambda^2}{2\pi c} \tag{3}$$

Если на единицу поверхности тела падает поток излучения $d\Phi_\omega$, и тело поглощает часть этого потока $d\Phi'_\omega$, то говорят о поглощательной способности тела:

$$a_{\omega T} = \frac{d\Phi'_\omega}{d\Phi_\omega} \tag{4}$$

Тело с $a_{\omega T} \equiv 1$ называется абсолютно черным, тело с $a_{\omega T} = a_T < 1$, называется серым.

Из равновесности теплового излучения следует закон Кирхгофа:

$$\frac{r_{\omega T}}{a_{\omega T}} = f(\omega, T) \tag{5}$$

Где $f(\omega, T)$ (легко видеть) – испускательная способность абсолютно черного тела.

Чтобы найти $f(\omega, T)$, рассмотрим область с абсолютно черными стенками. В каждой точке этоц области плотность потока энергии равна:

$$dj = cu\frac{d\Omega}{4\pi} \tag{6}$$

(Здесь u – плотность энергии)

Поток энергии, испускаемый элементом стенки ΔS в направлении телесного угла $d\Omega$ равен:

$$d\Phi_E = dj \Delta S \cos\vartheta = cu\frac{d\Omega}{4\pi}\Delta S \cos\vartheta = \frac{cu}{4\pi}\Delta S \cos\vartheta \sin\vartheta d\vartheta d\varphi \tag{7}$$

Проинтегрируем по половине телесного угла:

$$\Delta\Phi_E = \frac{cu}{4}\Delta S \tag{8}$$

С другой стороны:

$$\Delta\Phi_E = R^* \Delta S \tag{9}$$

(R^* – энергетическая светимость абсолютно черного тела)

Поэтому:

$$f(\omega, T) = \frac{c}{4} u(\omega, T) \tag{10}$$

Йозеф Стефан определил, что энергетическая светимость любого тела пропорциональна четвертой степени температуры (на самом деле это верно только для абсолютно черного тела). Людвиг Больцман теоретиески вывел выражение для R^*:

$$R^* = \int_0^\infty f(\omega, T) d\omega = \sigma T^4 \tag{11}$$

(σ – постоянная Стефана-Больцмана)

Вильгельм Вин показал, что функция спектрального распределения должна иметь вид:

$$f(\omega, T) = \omega^3 F(\frac{\omega}{T}) \tag{12}$$

Перейдем к функции $\varphi(\lambda, T)$:

$$\varphi(\lambda, T) = (\frac{2\pi c}{\lambda^2})(\frac{2\pi c}{\lambda})^3 F(\frac{2\pi c}{\lambda T}) = \frac{1}{\lambda^5}\psi(\lambda T) \tag{13}$$

Где $\psi(\lambda T)$ – некоторая функция произведения λT. Задача – установить связь между максимальной длиной излучаемых тепловых волн λ_m и температурой. Продифференцируем предыдущее соотношение по λ:

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda^5}T\psi'(\lambda T) - \frac{5}{\lambda^6}\psi(\lambda T) = \frac{1}{\lambda^6}[\lambda T\psi'(\lambda T) - 5\psi(\lambda T)] = \frac{1}{\lambda^6}\Psi(\lambda T) \tag{14}$$

Условие максимума:

$$(\frac{d\varphi}{d\lambda})_{\lambda=\lambda_m} = \frac{1}{\lambda_m^6}\Psi(\lambda_m T) = 0 \tag{15}$$

Из опыта известно, что λ_m конечно. Поэтому $\Psi(\lambda_m T) = 0$. Решение этого уравнения дает соотношение, называемое законом смещения Вина:

$$\lambda_m T = b \tag{16}$$

Здесь b – экспериментально определяемая константа.