Законы Ома и Джоуля-Ленца в дифференциальной форме

Закон Ома для однородного участка цепи гласит:

$$I = \frac{U}{R} \tag{1}$$

При этом

$$R = \rho\frac{l}{S} \tag{2}$$

Перейдем к плотности тока в цилиндре длины dl с основанием dS:

$$jdS = \frac{UdS}{\rho dl} = \frac{dS}{\rho dl}Edl \tag{3}$$

$$j = \frac{1}{\rho}E \tag{4}$$

Введя величину $\sigma = \frac{1}{\rho}$, называемую удельной электрической проводимостью, получаем:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \tag{5}$$

Полученное выражение – закон Ома для однородного участка цепи в дифференциальной форме.

В случае неоднородного участка цепи имеется поле сторонних сил $\vec{E}^*$:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*) \tag{6}$$

Закон Джоуля-Ленца в интегральной форме утверждает:

$$Q = UIt = RI^2t \tag{7}$$

Перейдем к элементарным величинам:

$$dQ = RI^2dt \tag{8}$$

Раскроем сопротивление:

$$dQ = \frac{\rho dl}{dS}I^2dt \tag{9}$$

И силу тока:

$$dQ = \frac{\rho dl}{dS}(jdS)^2dt \tag{10}$$

Получаем:

$$dQ = \rho j^2 dV dt \tag{11}$$

Разделив на $dVdt$ получаем количество теплоты, выделяемое в единице объема за единицу времени $Q_{\text{уд}}$ (поскольку j стоит в квадрате, можно перейти к вектору $\vec{j}$):

$$Q_{\text{уд}} = \rho\vec{j}^{\,2} \tag{12}$$

Полученная формула выражает закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме. Она определяет удельную мощность тока:

$$P_{\text{уд}} = \rho\vec{j}^{\,2} \tag{13}$$

Аналогичный результат будет, если в формулу для удельной мощности $P_{\text{уд}} = (\vec{j}; \vec{E} + \vec{E}^*)$ подставить $\vec{E} + \vec{E}^* = \rho\vec{j}$.