Квантование момента импульса, спин

Решение уравнения на собственные значения и собственные функции оператора момента импульса дает следующий набор возможных дискретных значений для модуля момента импульса:

$$M = \hbar\sqrt{l(l+1)} \quad (l = 0, 1, 2, ...) \tag{1}$$

Рассмотрим проекцию момента на выделенную ось M_z. Уравнение на собственные значения и собственные функции оператора имеет вид:

$$\hat{M}_z \psi = M_z \psi \tag{2}$$

В полярных координатах (r, ϑ, φ) оператор проекции момента импульса на полярную ось z имеет вид:

$$\hat{M}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{3}$$

Уравнение Шредингера:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = M_z \psi \tag{4}$$

После подстановки $\psi = e^{\alpha\varphi}$:

$$-i\hbar\alpha = M_z \tag{5}$$

Отсюда:

$$\psi = Ce^{(i\frac{M_z}{\hbar})\varphi} \tag{6}$$

Условие однозначности выражается в том, что $\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$. Поэтому $\hat{M}_z$ обладает дискретным спектром:

$$M_z = m\hbar \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \tag{7}$$

m называется магнитным квантовым числом.

Суммарный модуль момента импульса системы из двух частиц, как и любой другой модуль момента импульса, определяется выражением:

$$M = \hbar\sqrt{L(L+1)}, \quad L = l_1 + l_2,\ l_1 + l_2 - 1,\ ..., |l_1 - l_2| \tag{8}$$

Проекция результирующего момента на некоторую ось определяется выражением:

$$M_z = m_L\hbar \quad (m_L = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm L) \tag{9}$$

Электрон имеет собственные механический и магнитный моменты M_s и μ_s соответственно. Между ними есть связь:

$$\frac{\mu_s}{M_s} = -\frac{e}{m_e c} \tag{10}$$

Модуль собственного момента импульса электрона определяется через спиновое число, равное для электрона 1/2:

$$M_s = \hbar\sqrt{s(s+1)} = \hbar\sqrt{\frac{1}{2}\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{3} \tag{11}$$

Проекция спина на заданное направление может принимать значения:

$$M_{sz} = m_s\hbar \quad (m_s = \pm s = \pm 1/2) \tag{12}$$

Воспользуемся магнитомеханическим соотношением выше, чтобы найти μ_s:

$$\mu_s = -\frac{e}{m_e c} M_s = -\frac{e\hbar}{m_e c}\sqrt{s(s+1)} = -2\mu_{\text{Б}}\sqrt{s(s+1)} = -\mu_{\text{Б}}\sqrt{3} \tag{13}$$

Величина $\mu_{\text{Б}} = -\frac{e\hbar}{2m_e c}$ называется магнетоном Бора.