Лемма о частном решении ОДУ 1-го порядка со специальной правой частью

Пусть дано уравнение:

$$y' - \lambda y = P_m(x)e^{\mu x} \tag{1}$$

Тогда по лемме:

При $\lambda \neq \mu$ (нерезонансный случай) ОДУ всегда имеет частное решение вида:

$$y_{\text{ч.н.}} = Q_m(x)e^{\mu x} \tag{2}$$

При $\lambda = \mu$ (резонансный случай):

$$y_{\text{ч.н.}} = xQ_m(x)e^{\mu x} \tag{3}$$

Доказательство:

Ищем частное решение в виде:

$$y = ze^{\mu x}, \quad z-? \tag{4}$$

Отсюда:

$$y' = z'e^{\mu x} + z\mu e^{\mu x} \tag{5}$$

Подставляем в (1):

$$z'e^{\mu x} + z\mu e^{\mu x} - \lambda z e^{\mu x} = P_m(x)e^{\mu x} \tag{6}$$

Делим на $e^{\mu x}$:

$$z' + z(\mu - \lambda) = P_m(x) \tag{7}$$

1) Пусть $\lambda \neq \mu$. Будем искать частное решение уравнения (7) в виде многочлена:

$$z = Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m \tag{8}$$

Полагаем:

$$P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + ... + a_m \tag{9}$$

Подставляем все в (1):

$$mb_0x^{m-1} + (m-1)b_1x^{m-2} + ... + b_{m-1} + (\mu - \lambda)(b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + ... + a_m \tag{10}$$

Методом неопределенных коэффициентов находим $b_0..b_m$:

$$x^m : (m - \lambda)b_0 = a_0 \Rightarrow b_0 = \frac{a_0}{m - \lambda} \neq 0 \tag{11}$$

$$x^{m-1} : mb_0 = a_1 \Rightarrow b_1 = \frac{a_1 - mb_0}{m - \lambda} \tag{12}$$

и т.д.

Записываем частное решение:

$$z_{\text{ч.н.}} = Q_m(x) \Rightarrow y_{\text{ч.н.}} = Q_m(x)e^{\mu x} \tag{13}$$

2) Пусть $\lambda = \mu$. Тогда уравнение принимает вид:

$$z' = P_m(x) \tag{14}$$

Частное решение:

$$z_{\text{ч.н.}} = \frac{a_0}{m+1}x^{m+1} + \frac{a_1}{m}x^m + ... + a_mx = x(\frac{a_0}{m+1}x^m + \frac{a_1}{m}x^{m-1} + ... + a_m) = xQ_m(x) \tag{15}$$

Доказано.
Принцип суперпозиции:

Если уравнение представлено в виде:

$$l(D)[y] = \sum_{j=1}^{N} f_j(x) \tag{16}$$

И $y_{\text{ч.н.}_j}$ – частное решение уравнения вида $l(D)[y] = f_j(x)$, то частное решение исходного уравнения – есть сумма соответсвующих частных решений $y_{\text{ч.н.}_j}$:

$$y_{\text{ч.н.}} = \sum_{j=1}^{N} y_{\text{ч.н.}_j} \tag{17}$$