ОДУ в полных дифференциалах

Рассмотрим уравнение:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

Здесь $P(x,y), Q(x,y) \in C(D), D \in \mathbb{R}^2$. Оно называется уравнением в полных дифференциалах, если $\exists f = f(x,y)$, полный дифференциал которой $df = Pdx + Qdy$.

Критерий того, что уравнение является уравнением в полных дифференциалах:

Пусть D – односвязная область в $\mathbb{R}^2$. Тогда уравнение (1) является в этой области уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполняется:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{2}$$

Доказательство.

Необходимость.

Пусть (1) – ОДУ в полных дифференциалах и $P, Q \in C(D)$. По определению $\exists f$: $df = Pdx + Qdy$, т.е. $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ и $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$. Тогда $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}$.

Достаточность.

Пусть D – односвязная область в $\mathbb{R}^2$, $P, Q \in C(D)$ и $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Фиксируем (x_0, y_0) и рассмотрим криволинейный интеграл:

$$\int_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} Pdx + Qdy \tag{3}$$

Воспользуемся формулой Грина:

$$\int_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} Pdx + Qdy = \iint \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy \tag{4}$$

Таким образом, если $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то $df = Pdx + Qdy$.

Доказано.

Метод решения: проинтегрировать Pdx, обозначить произвольную постоянную как $\varphi(y)$, продифференцировать полученное выражение по y и приравнять к Q. Найти $\varphi(y)$. Общее решение будет иметь вид:

$$\int Pdx = C, \tag{5}$$

Где в качестве произвольной постоянной интегрирования взята $\varphi(y)$. Можно идти по обратному пути, интегрируя Qdy (далее аналогично).

Интегрирующим множителем для уравнения (1) является такая функция $m(x,y), \exists (x_1, y_1) : m(x_1, y_1) \neq 0$, что при умножении на нее уравнение (1) становится уравнением в полных дифференциалах.