ОДУ с разделяющимися переменными и сводящиеся к ним

ОДУ с разделяющимися переменными имеют вид:

$$y' = f(x)g(y),\ f(x) \in C(I),\ g(x) \in C(J) \tag{1}$$

Метод решения – разделение переменных и интегрирование:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{2}$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \tag{3}$$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C \tag{4}$$

Здесь $x_0 \in I,\ y_0 \in J$ – фиксированные.

Конечное уравнение:

$$G(y) = F(x) + C \tag{5}$$

Формула (5) может не содержать всех решений ОДУ (1): если уравнение $g(y) = 0$ имеет корень $y = y^*$, то $y = y^*$ – решение ОДУ (1).

Задача Коши состоит в отыскании решения ОДУ (1), удовлетворяющего условиям:

$$y' = f(x)g(y) \tag{6}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{7}$$

Если $g(y_0) \neq 0$, то задача Коши имеет единственное решение:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx \tag{8}$$

Если $g(y_0) = 0$, то $y = y_0$ – решение задачи Коши, но у этой задачи Коши могут быть и другие решения, если несобственный интеграл $\int_{y_0}^{y}$ сходится.

К ОДУ с разделяющимися переменными, например, сводятся:

Однородные ОДУ:

$$y' = f(\frac{y}{x}) \tag{9}$$

Линейные ОДУ первого порядка:

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{10}$$