Однородные ОДУ, тождество Эйлера

Однородные ОДУ имеют вид:

$$y' = f(\frac{y}{x}) \tag{1}$$

Метод решения: замена $\frac{y}{x} = z$. $z = z(x)$ – новая функция. Затем сведение к ОДУ с разделяющимися переменными:

$$\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = zx \Rightarrow y' = z'x + z \tag{2}$$

$$z'x = f(z) - z \tag{3}$$

Разделение переменных, решение и обратная подстановка. Интегральные кривые образуют множество подобных кривых, проходящих через точку $(0, 0)$.

Функция $f(x, y)$ называется однородной степени m, если для нее выполняется:

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y) \tag{4}$$

Здесь $m \in \mathbb{Z}$, либо $m = \frac{p}{2q+1}$, где $p, q \in \mathbb{Z}$. Однородные функции удовлетворяют тождеству Эйлера:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = mf \tag{5}$$

Для доказательства – продифференцировать (4) и положить $t = 1$.

Если $f(x, y)$ однородна при $t > 0$, то она называется положительно однородной.
Рассмотрим уравнение:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{6}$$

Если P и Q – однородные функции одной степени, то (6) является однородным ОДУ.