Предел последовательности комплексных чисел

Определение ограниченной последовательности:

$$\{z_n\} \text{ ограничена} \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |z_n| < M \tag{1}$$

Определение предела последовательности комплексных чисел:

$$\lim_{n\to\infty}\{z_n\} = z \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall (n \in \mathbb{N}) \geq N \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon \tag{2}$$

Критерий сходимости последовательности комплексных чисел:

$$\exists \lim_{n\to\infty}\{z_n = a_n + ib_n\} \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty}\{a_n\},\ \exists \lim_{n\to\infty}\{b_n\} \tag{3}$$

$\Rightarrow$

Из определения предела, из неравенства треугольников, чисто действительного, чисто мнимого числа:

$$\exists \lim_{n\to\infty}\{z_n\} = a + ib \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\{z_n\} = z \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall (n \in \mathbb{N}) \geq N \Rightarrow |a_n - a| \leq |z_n - z| < \varepsilon,\ |b_n - b| < \varepsilon \tag{4}$$

$\Leftarrow$

Из определения предела, определения модуля комплексного числа:

$$\exists \lim_{n\to\infty}\{a_n\},\ \exists \lim_{n\to\infty}\{b_n\}, |z_n - z| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty}\{z_n = a_n + ib_n\} \tag{5}$$

#

Критерий Коши сходимости последовательности комплексных чисел:

$$\exists \lim_{n\to\infty}\{z_n\} \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall (n \in \mathbb{N}) \geq N,\ \forall (m \in \mathbb{Z}) \geq 0 \Rightarrow |z_n - z_{n+m}| < \varepsilon \tag{6}$$

$\Rightarrow$

Из критерия сходимости последовательности комплексных чисел:

$$\exists \lim_{n\to\infty}\{z_n = a_n + ib_n\} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty}\{a_n\},\ \exists \lim_{n\to\infty}\{b_n\} \tag{7}$$

т.е. выполняется критерий Коши для $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$:

$$\exists \lim_{n\to\infty}\{a_n\} \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall (n \in \mathbb{N}) \geq N_1,\ \forall (m \in \mathbb{Z}) \geq 0 \Rightarrow |a_n - a_{n+m}| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{8}$$

$$\exists \lim_{n\to\infty}\{b_n\} \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall (n \in \mathbb{N}) \geq N_2,\ \forall (m \in \mathbb{Z}) \geq 0 \Rightarrow |b_n - b_{n+m}| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{9}$$

Из неравенства треугольников:

$$|a_n - a_{n+m}| < |z_n - z_{n+m}| < \varepsilon,\ \ |b_n - b_{n+m}| < |z_n - z_{n+m}| < \varepsilon \tag{10}$$

При $n \geq \max(N_1, N_2)$ выполняется (8), (9) вместе с (10):

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)) \in \mathbb{N} : \forall (n \in \mathbb{N}) \geq N,\ \forall (m \in \mathbb{Z}) \geq 0 \Rightarrow |z_n - z_{n+m}| < \varepsilon \tag{11}$$

$\Leftarrow$

$$(\text{правая часть 6}),\ (10) \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty}\{a_n\},\ \exists \lim_{n\to\infty}\{b_n\} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty}\{z_n = a_n + ib_n\} \tag{12}$$

#

Понятие бесконечно удаленной точки

Рассмотрим последовательность:

$$\{z_n\} : \forall R > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall (n \in \mathbb{N}) \geq N \Rightarrow |z_n| > R \tag{13}$$

Это неограниченно возрастающая последовательность. Считается, что она сходится к специальному комплексному числу $z = \infty$. Т.н. полная комплексная плоскость состоит из обычной комплексной плоскости и единственной бесконечно удаленной точки $z = \infty$.