Принцип наименьшего действия

Самый общий закон движения механических систем называется принципом наименьшего действия (принципом Гамильтона). Каждая механическая система характеризуется функцией, зависящей только от координат, скоростей и времени:

$$L(q_1, q_2, ...q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ...\dot{q}_s, t) \tag{1}$$

Если в моменты времени t_1 и t_2 система характеризуется обобщенными координатами $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$ соответственно, то между этими моментами времени система движется так, что интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt \tag{2}$$

имеет наименьшее значение. Функция $L(q, \dot{q}, t)$ называется функцией Лагранжа данной системы, а интеграл S – действием.

Механическое состояние системы полностью определяется заданием координат и скоростей – функция Лагранжа не может зависеть от высших производных.

Пусть $q = q(t)$ – функция, для которой S имеет минимум. Рассмотрим функцию:

$$q(t) + \delta q(t) \tag{3}$$

$\delta q(t)$ – бесконечно малая на $[t_1, t_2]$ функция (ее называют вариацией функции $q(t)$). При $t = t_1$ и $t = t_2$ все функции вида (3) должны принимать одни и те же значения $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$, поэтому:

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \tag{4}$$

Найдем изменение S при замене q на $q + \delta q$:

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt \tag{5}$$

Перейдем от разности к вариации:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt = \int_{t_1}^{t_2} (\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q})dt \tag{6}$$

Таким образом, принцип наименьшего действия можно записать в виде:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt = \int_{t_1}^{t_2} (\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q})dt = 0 \tag{7}$$

$\delta q = \frac{d}{dt}\delta q$. Проинтегрируем второй член по частям:

$$\delta S = \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} (\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}})\delta q \; dt = 0 \tag{8}$$

Из условия (4) первое слагаемое равно нулю. Интеграл равен нулю при любых δq тогда и только тогда, когда равно нулю подынтегральное выражение. Получили уравнение:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{9}$$

Оно называется уравнением Лагранжа.

При наличии нескольких степеней свободы имеем систему дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{10}$$

Рассмотрим функцию Лагранжа L', отличающуюся от L на некоторое слагаемое – полную производную функции координат и времени:

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}f(q, t) \tag{11}$$

Распишем действие:

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t)dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt}dt = S + f(q^{(2)}, t) - f(q^{(1)}, t) \tag{12}$$

При варьировании исчезнет $f(q^{(2)}, t) - f(q^{(1)}, t)$ – уравнение Лагранжа не изменит вид. Таким образом, функция Лагранжа определена с точностью до прибавления к ней полной производной от любой функции координат и времени.