Стоячие волны в прямоугольном резонаторе с идеально проводящими стенками

Внутри такого резонатора бегут волны со следующими проекциями волновых векторов:

$$\{\pm k_x, \pm k_y, \pm k_z\} \tag{1}$$

(Легко видеть, что их 8 штук)

Если при отражении от стенок фаза волн не меняется, уравнение стоячей волны имеет вид:

$$\xi = \sum_{i=1}^{8} \xi_i = 8A\cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)\cos(\omega t) \tag{2}$$

В случае изменения фазы на π при отражении:

$$\xi = \sum_{i=1}^{8} \xi_i = 8A\cos(k_x x + \frac{\pi}{2})\cos(k_y y - \frac{\pi}{2})\cos(k_z z + \frac{\pi}{2})\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \tag{3}$$

Чтобы во всех вершинах резонатора амплитуда имела одинаковое значение, необходимо выполнение условий:

$$k_x = \frac{\pi}{a}n_1; \;\; k_y = \frac{\pi}{b}n_2; \;\; k_z = \frac{\pi}{c}n_3 \tag{4}$$

a, b, c – размеры резонатора, n_1, n_2, n_3 – натуральные числа.

В k-пространстве каждой стоячей волне соответствует точка с такими координатами. На долю каждой точки приходится объем $\frac{\pi^3}{abc}$, поэтому плотность точек равна V/π^3. Число точек, у которых проекции волновых векторов заключены в пределах $(k_x, k_x + dx)$, $(k_y, k_y + dy)$, $(k_z, k_z + dz)$ равно:

$$dN_{k_x,k_y,k_z} = \frac{V}{\pi^3}dk_x dk_y dk_z \tag{5}$$

Но точки, соответствующие стоячим волнам, лежат только в первом октанте. Поэтому число стоячих волн в шаровом слое радиуса k и ширины dk равно:

$$dN_k = \frac{V}{\pi^3}\frac{1}{8}4\pi k^2 dk = V\frac{k^2 dk}{2\pi^2} \tag{6}$$

Поскольку $k = \omega/v$ и $dk = d\omega/v$, можно найти число стоячих волн с частотами от ω до $\omega + d\omega$ в резонаторе объема V:

$$dN_\omega = V\frac{\omega^2 d\omega}{2\pi^2 v^3} \tag{7}$$

Или число таких волн в единице объема:

$$dn_\omega = \frac{\omega^2 d\omega}{2\pi^2 v^3} \tag{8}$$