Теорема об общем решении однородного линейного ОДУ с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения

Имеем ОДУ:

$$l(D)y = 0 \tag{1}$$

И характеристическое уравнение:

$$l(\lambda) = 0 \tag{2}$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_s$ – все различные корни характеристического уравнения кратностей $k_1, k_2, ...k_s$ соответственно. Тогда общее решение ОДУ задается формулой $(*)$:

$$y = \sum_{j=1}^{s} P_j(x)e^{\lambda_j x} \tag{3}$$

Здесь $P_j(x)$ – многочлен степени $k_j - 1$, коэффициенты которого есть произвольные постоянные, $j = 1, s$.

Доказательство.

1)

Покажем, что всякий квазиполином $(*)$ – решение ОДУ. Покажем вначале, что $e^{\lambda_j x}$ есть решение ОДУ.

$$l(D)e^{\lambda_j x} = ... = e^{\lambda_j x} l(\lambda_j) = 0 \tag{4}$$

Это следует из аналогичной теоремы для случая простых корней.

При $k_j \geq 2$ надо далее проверять, что $xe^{\lambda}_j x$ – решение ОДУ, т.е. $l(D)(xe^{\lambda_j x}) = 0$. $l(D)$ – линейный дифференциальный оператор:

$$l(D) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}D^k = a_n D^0 + a_{n-1}D + ... + a_0 D^n \tag{5}$$

Используя формулу Лейбница, получаем:

$$D^k(xe^{\lambda_j x}) = \sum_{m=0}^{k} C_k^m x^{(m)}(e^{\lambda_j x})^{(k-m)} = \tag{6}$$

$$= \sum_{m=0}^{k} C_k^m x^{(k-m)}(e^{\lambda_j x})^{(m)} = (e^{\lambda_j x})^{(k)} + C_k^{k-1}(e^{\lambda_j x})^{(k-1)} = \tag{7}$$

$$= \lambda_j^k e^{\lambda_j x}x + k\lambda_j^{k-1}e^{\lambda_j x} = \lambda_j^{k-1}e^{\lambda_j x}(\lambda_j x + k), \;\; k = 1..n \tag{8}$$

Отсюда:

$$l(D)(xe^{\lambda_j x}) = a_n x e^{\lambda_j x} + a_{n-1}e^{\lambda_j x}(\lambda_j x+1) + ... + a_0\lambda_j^{n-1}e^{\lambda_j x}(\lambda_j x+n) = xe^{\lambda_j x}(a_n + a_{n-1}\lambda_j + ... + a_0\lambda_j) + e^{\lambda_j x}(a_{n-1} + ... + a_0 n\lambda_j^{n-1}) = 0 \tag{9}$$

$$l(\lambda_j) = l'(\lambda_j) = ... = l^{(k_j-1)}(\lambda_j) = 0. \;\; l^{(k_j)} \neq 0 \tag{10}$$

Продолжая процесс, получим, что

$$l(D)(x^p e^{\lambda_j x}) = 0, \;\; \forall p = 0, k_j - 1, \; \forall j = 1..s \tag{11}$$

Из линейности $l(D)$ следует:

$$l(D)(\sum_{j=1}^{s} P_j(x)e^{\lambda_j x}) = 0 \tag{12}$$

Доказано, что $\forall$ функция вида $(*)$ – решение ОДУ.

2)

Докажем, что всякое решение ОДУ представлено в виде $(*)$.

$$l(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2}...(\lambda - \lambda_{s-1})^{k_{s-1}}(\lambda - \lambda_s)^{k_s} \tag{13}$$

λ_j различны, k_j – их кратность.

$$l(D) = (D - \lambda_1)^{k_1}(D - \lambda_2)^{k_2}...(D - \lambda_{s-1})^{k_{s-1}}(D - \lambda_s)^{k_s} \tag{14}$$

Обозначим $(D-\lambda_1)^{k_1}(D-\lambda_2)^{k_2}...(D-\lambda_{s-1})^{k_{s-1}}$ через $l_1(D)$. Доказательство проведем по индукции.

Для $n=1$ доказано, т.к. это случай простых корней (см. соотв. теорему).

Предположим, что утверждение справедливо для дифференциальных уравнений порядка $(n-1)$:

$$l(D)y=0 \tag{15}$$

$$l(D)(D-\lambda_s)y=0 \tag{16}$$

Обозначим $z=(D-\lambda_s)y$:

$$l_1(D)z=0 \tag{17}$$

$$z=y'-\lambda_s y \tag{18}$$

Применим предположение индукции:

$$y=Q_1(x)e^{\lambda_1 x}+Q_2(x)e^{\lambda_2 x}+...+Q_{s-1}(x)e^{\lambda_{s-1}}x \tag{19}$$

$$y=P_1(x)e^{\lambda_1 x}+P_2(x)e^{\lambda_2 x}+...+P_s(x)e^{\lambda_s x} \tag{20}$$

$P_j(x)$ – многочлен степени k_j-1 с произвольными постоянными, $j=1..s$. $Q_j(x)$ – многочлен степени k_j-1, $j=1..s-1$.

Введем $\overline{Q}_s(x)e^{\lambda_s x}$, где $Q_s(x)=0$ при $k_s=1$ и $Q_s(x)$ – многочлен степени $k_s-\lambda$ при $k\geq 2$.

$$y'-\lambda_s y=\sum_{j=1}^{s-1}Q_j(x)e^{\lambda_j x}+\overline{Q}_s(x)e^{\lambda_s x} \tag{21}$$

– Линейное ОДУ 1 порядка с правой частью в виде квазиполинома.

$$y=C_s e^{\lambda_j x}+\sum_{j=1}^{s-1}P_j(x)e^{\lambda_j x}+x\overline{P}_s(x)e^{\lambda_s x} \tag{22}$$

Первое слагаемое – общее решение однородного уравнения, второе – частное решение неоднородного.

$P_j(x)$ – многочлен степени k_{j-1}, $j=1..s-1$. $\overline{P}_s(x)$ – 0 при $k_s=1$ и многочлен степени k_s-2 при $k_s\geq 2$.

$$y=\sum_j=1^{s-1}P_j(x)e^{\lambda_j x}+(C_s+x\overline{P}_s(x))e^{\lambda_s x} \tag{23}$$

Т.е. утверждение справедливо и для ОДУ порядка n. По математической индукции доказано.

Доказано.