Теорема об общем решении однородного линейного ОДУ с постоянными коэффициентами в случае простых корней характеристического уравнения

Пусть характеристическое уравнение имеет простые корни $\lambda_1 ... \lambda_n$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда:

1) $\forall$ функция вида $(*)$: $y = \sum_{j=1}^{n} C_j e^{\lambda_j x}$ (C_j – постоянная) является решением ОДУ.

2) Всякое решение ОДУ можно записать в виде $(*)$.

Доказательство

1)

Пусть C – постоянная, $y = \sum_{j=1}^{n} C_j e^{\lambda_j x}$. Проверим, что y является решением ОДУ. Проверим вначале, что $\forall j = 1..n$ $e^{\lambda_i x}$ есть решение.

Имеем:

$$l(D)e^{\lambda_j x} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} D^k (e^{\lambda_j x}) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} (e^{\lambda_j x})^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \lambda_j^k e^{\lambda_j x} = e^{\lambda_j x} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \lambda_j^k = e^{\lambda_j x} (a_0 \lambda_j^n + a_1 \lambda_j^{n-1} + ... + a_n) = e^{\lambda_j x} l(\lambda_j) = 0 \tag{1}$$

$\forall j = 1..n$ $l(D) e^{\lambda j x} = 0$, т.е. $e^{\lambda_j x}$ – решение ОДУ.

По утверждению о линейности множества решений ОДУ получаем, что всякая функция вида $(*)$ является решением ОДУ.

2)

Разложим характеристическое уравнение на множители:

$$l(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)...(\lambda - \lambda_n) \tag{2}$$

Все λ_j различные, поэтому для линейного дифференциального оператора $l(D)$ можно написать:

$$l(D) = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)...(D - \lambda_{n-1})(D - \lambda_n) \tag{3}$$

Обозначим за $l_1(D)$ выражение $(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)...(D - \lambda_{n-1})$. Исходное уравнение можно представить так:

$$l_1(D)(D - \lambda_n) y = 0 \tag{4}$$

Обозначим: $z = (D - \lambda_n)$, т.е. $z = y' - \lambda_n y$. Далее рассматриваем уравнение $(**)$: $l_1(D) z = 0$

Доказываем по индукции.

При $n = 1$:

$$y' - \lambda_1 y = 0 \tag{5}$$

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} \tag{6}$$

Утверждение верно. Теперь предположим, что оно верно для $n - 1$, $n \geq 2$. Это, в частности, означает, что решение z уравнения $(**)$ записывается в виде:

$$z = \sum_{j=1}^{n-1} A_j e^{\lambda_j x} \tag{7}$$

$$y' - \lambda_n y = \sum_{j=1}^{n-1} A_j e^{\lambda_j x} \Rightarrow y = C_n e^{\lambda_n x} + \sum_{j=1}^{n-1} C_j e^{\lambda_i x} \tag{8}$$

(т.к. $\lambda_n \neq \lambda_j$, $j = 1..n-1$, нет резонанса)

$y = \sum_{j=1}^{n} C_j e^{\lambda_j x}$ – это вид $(*)$.

Доказано.