Ток смещения

Ротор $\vec{H}$ равен плотности макроскопических токов:

$$[\vec{\nabla};\vec{H}]=\vec{j} \tag{1}$$

Вектор $\vec{j}$ связан с плотностью сторонних зарядов уравнением непрерывности:

$$(\vec{\nabla};\vec{j})=-\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{2}$$

Представим заряжающийся конденсатор. Рассмотрим одну из его пластин: по проводнику, соединенному с ней течет ток I, который прекращается после зарядки конденсатора. Выберем поверхность S_1, пересекающую провод, и другую поверхность S_2 – между обкладками конденсатора. По теореме Стокса:

$$\oint_{l_1}\vec{H}d\vec{l}=\int_{S_1}\vec{j}d\vec{S}=I \tag{3}$$

$$\oint_{l_2}\vec{H}d\vec{l}=\int_{S_2}\vec{j}d\vec{S}=0 \tag{4}$$

Поверхность S_2 не охватывает токов, поэтому циркуляция $\vec{H}$ по контуру, ограничивающему эту поверхность, равна нулю. Этого не может быть, т.к. напряженность поля между обкладками точно не равна нулю.

Следовательно, в случае изменяющегося во времени магнитного поля, теорема о циркуляции H не работает.

Несоответствие также выражается в том, что если взять дивергенцию от левой и правой части уравнения $[\vec{\nabla};\vec{H}]=\vec{j}$, слева всегда будет 0, а справа – необязательно. Это противоречит уравнению непрерывности.

Максвелл ввел в правую часть уравнения $[\vec{\nabla};\vec{H}]=\vec{j}$ дополнительное слагаемое $\vec{j}_{\text{смещ}}$:

$$[\vec{\nabla};\vec{H}]=\vec{j}+\vec{j}_{\text{смещ}}=\vec{j}_{\text{полн}} \tag{5}$$

Это слагаемое называется током смещения и имеет размерность плотности тока. Если $(\vec{\nabla};\vec{j}_{\text{смещ}})=-(\vec{\nabla};\vec{j})$, то мы действительно получим тождество, взяв дивергенцию от обеих частей уравнения (5):

$$0=(\vec{\nabla};[\vec{\nabla};\vec{H}])=-(\vec{\nabla};\vec{j})+(\vec{\nabla};\vec{j})=0 \tag{6}$$

Из уравнения непрерывности:

$$(\vec{\nabla};\vec{j}_{\text{смещ}})=\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{7}$$

По теореме о потоке вектора $\vec{D}$:

$$(\vec{\nabla};\vec{D})=\rho \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla};\vec{D})=\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{9}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=(\vec{\nabla};\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}) \tag{10}$$

$$(\vec{\nabla};j_{\text{смещ}})=(\vec{\nabla};\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}) \tag{11}$$

Окончательное выражение для $\vec{j}_{\text{смещ}}$:

$$\vec{j}_{\text{смещ}}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{12}$$