Уравнения Бернулли и Риккати

Уравнением Бернулли называется уравнение

$$y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha} \tag{1}$$

При $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$ (легко видеть, что в противном случае получаются линейные ОДУ 1-го порядка, неоднородное и однородное соответственно).

Метод решения: разделить на y^{α}:

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + a(x)y^{1-\alpha} = b(x) \tag{2}$$

Сделать замену $z = y^{1-\alpha}$ (тогда $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, т.е. $\frac{y'}{y^{\alpha}} = \frac{z'}{1-\alpha}$):

$$\frac{1}{1-\alpha}z' + a(x)z = b(x) \tag{3}$$

Решить полученное уравнение и в общем решении сделать обратную подстановку.

Уравнение Риккати:

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x) \tag{4}$$

В общем случае не решается в квадратурах. Если известно одно частное решение $y_1(x)$, то заменой $y = y_1(x) + z$ уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли.

Свойства.

1) В уравнении Риккати можно провести замену:

$$x = \varphi(\widetilde{x}) \tag{5}$$

Где $\widetilde{x}$ – гладкая функция, либо дробно-линейную замену:

$$y = \frac{\alpha(x)\widetilde{y} + \beta x}{\gamma(x)\widetilde{y} + \delta x}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0 \tag{6}$$

2) Заменой $y = z\varphi(x)$, $z = w + \psi(x)$ уравнение Риккати можно привести к виду:

$$w' = w + f(x) \tag{7}$$

3) Уравнение Риккати можно привести к линейному однородному ОДУ 2-го порядка (с переменными коэффициентами):

$$y = a(x)z, \quad z = -\frac{u'}{u} \tag{8}$$

Частный случай уравнения Риккати:

$$y' + y^2 = \frac{a}{x^2} \tag{9}$$

Лиувилль доказал, что это уравнение решается только при $\alpha = 2$ и $\alpha = \frac{4k}{2k-1}$, $k \in \mathbb{Z}$.