

Условия на границе двух диэлектриков

Известно:

$$[\vec{\nabla}; \vec{E}] = 0, \quad (\vec{\nabla}; \vec{D}) = 0 \quad (1)$$

Отсюда можем выяснить, как изменяются векторы \vec{E} и \vec{D} на границе двух диэлектриков, как преломляются их линии.

Вблизи границы выберем прямоугольный контур со сторонами l и h (сторона h перпендикулярна границе и ее длина стремится к нулю). По теореме Стокса циркуляция \vec{E} по этому контуру должна быть равна нулю, т.к. он замкнутый:

$$[\vec{\nabla}; \vec{E}] = 0 \Rightarrow \oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad (2)$$

Относительно границы раздела можно представить вектор \vec{E} через нормальную составляющую E_n и тангенциальную E_τ . Проходя через границу раздела, эти составляющие изменяются. Возьмем криволинейный интеграл:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = E_{\tau 1} l - E_{\tau 2} l = 0 \quad (3)$$

Получили соотношение для тангенциальной составляющей \vec{E} :

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2} \quad (4)$$

(Мы пренебрегаем значением интеграла по частям контура длины h , т.к. эта длина стремится к нулю)

Теперь выберем поверхность параллелепипеда, пересекающую границу (основания площади S и высота $h \rightarrow 0$).

По теореме Остроградского-Гаусса выражаем поток \vec{D} через эту поверхность:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = 0 \quad (5)$$

Берем интеграл, пренебрегая потоком через боковые стенки высоты h :

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = D_{n1} S - D_{n2} S = 0 \quad (6)$$

При вычислении потока мы всюду спроектировали \vec{S} на одну нормаль, поэтому получили разные знаки у слагаемых.

Таким образом:

$$D_{n1} S = D_{n2} S \quad (7)$$

Выяснили, как изменяется тангенциальная составляющая \vec{E} и нормальная составляющая \vec{D} при проходе через границу раздела диэлектриков.

Чтобы узнать, как изменяются E_n и D_τ на границе, раскроем D через E (и наоборот):

$$D_{n1} = D_{n2} \quad (8)$$

$$\epsilon_0 \epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_0 \epsilon_2 E_{n2} \quad (9)$$

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad (10)$$

Аналогично найдем изменение D_τ :

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2} \quad (11)$$

$$\frac{D_{\tau 1}}{\epsilon_0 \epsilon_1} = \frac{D_{\tau 2}}{\epsilon_0 \epsilon_2} \quad (12)$$

$$\frac{D_{\tau 1}}{D_{\tau 2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (13)$$

Выяснили, что на границе двух диэлектриков происходит следующее:

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}, \quad \frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad (14)$$

$$D_{n1} = D_{n2}, \quad \frac{D_{\tau 1}}{D_{\tau 2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (15)$$