Формула Рэлея-Джинса и формула Планка

Рэлей и Джинс попытались определить равновесную плотность излучения $u(\omega, T)$, исходя из теоремы классической статистики о равнораспределении энергии по степеням свободы.

Таким образом, на каждое электромагнитное колебание должна приходиться энергия, равная $\frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT$ (слагаемые соответствуют магнитной и электрической компонентам).

Равновесное излучение в полости представляет собой систему стоячих волн, которые могут быть поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях. Поэтому число таких волн в единице объема равно:

$$dn_\omega = \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3} \tag{1}$$

Таким образом:

$$u(\omega, T)d\omega = \bar{\varepsilon} dn_\omega = kT\frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}d\omega \tag{2}$$

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}kT \tag{3}$$

Поскольку $f(\omega, T) = \frac{cu(\omega,T)}{4}$:

$$f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2}kT \tag{4}$$

($f(\omega, T)$ – испускательная способность абсолютно черного тела)

Эта формула находится в противоречии с опытом, т.к. при $\omega \to \infty$ равновесная энергия бесконечна. Данный феномен бын назван ультрафиолетовой катастрофой. Его наличие означает неприменимость классической физики к описанию процессов излучения.

Планку удалось найти вид функции $u(\omega, T)$ в точности соответствующий опытным данным. Он предположил, что электромагнитное излучение испускается в виде отдельных порций – квантов, величина которых пропорциональна частоте излучения:

$$\varepsilon = \hbar\omega \tag{5}$$

$\hbar$ – постоянная Планка.

Таким образом, энергия кратна величине квантов:

$$\varepsilon_n = n\hbar\omega \tag{6}$$

В состоянии равновесия распределение колебаний по энергии должно подчиняться закону Больцмана:

$$P_n = \frac{N_n}{N} = \frac{\exp(-\varepsilon_n/kT)}{\sum_n \exp(-\varepsilon_n/kT`)} \tag{7}$$

Можно найти среднюю энергию:

$$\bar{\varepsilon} = \sum_n P_n \varepsilon_n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega \exp(-n\hbar\omega/kT)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\hbar\omega/kT)} = -\hbar\omega \frac{d}{d(\hbar\omega/kT)} \ln \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n(\hbar\omega/kT)) \tag{8}$$

Под знаком логарифма – бесконечная убывающая геометрическая прогрессия с $b_1 = 1$ и $q = e^{-x}$. Ее сумму легко найти:

$$\bar{\varepsilon} = -\hbar\omega \frac{d}{d(\hbar\omega/kT)} \ln \frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}} = \hbar\omega \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}{1 - e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}} = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \tag{9}$$

Кстати, при $\hbar \to 0$ средняя энергия стремится к kT, т.е. становится справедливым классический случай.

Получим плотность равновесной энергии для интервала частот $(\omega, \omega + d\omega)$:

$$u(\omega, T)d\omega = \bar{\varepsilon} dn_\omega = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \tag{10}$$

И

$$f(\omega, T) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \tag{11}$$

Эти два соотношения называются формулами Планка.

Получим из них закон Стефана-Больцмана, т.е. найдем энергетическую светимость абсолютно черного тела:

$$R^* = \int_0^\infty f(\omega, T) d\omega = \int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \tag{12}$$

Произведем замену $\omega = (kT/\hbar)x$:

$$R^* = \int_0^\infty \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} (\frac{kT}{\hbar})^3 \frac{(\frac{kT}{\hbar})dx}{e^x - 1} = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} (\frac{kT}{\hbar})^4 (\frac{\pi^4}{15}) = \frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3} T^4 = \sigma T^4 \tag{13}$$