Формула Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{1}$$

Доказательство:

Вспомним ряд Тейлора-Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ... = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{2}$$

Разложим по нему синус и косинус угла φ:

$$\sin\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!}\varphi^n; \quad \cos\varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos^{(n)}(0)}{n!}\varphi^n; \tag{3}$$

Можно выразить $\sin^{(n)}(0)$ и $\cos^{(n)}(0)$ через $[e^{i\varphi}]^{(n)}$ (пользуемся тем, что $i^2 = -1$):

$$\sin^{(n)}(0) = \frac{1-(-1)^n}{2i}[e^{i\varphi}]^{(n)}; \quad \cos^{(n)}(0) = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2}[e^{i\varphi}]^{(n)} \tag{4}$$

Рассмотрим n-ный член разложения $\cos\varphi + i\sin\varphi$ в ряд Тейлора-Маклорена:

$$(cos\varphi + i\sin\varphi)_n = \frac{\cos^{(n)}(0) + i\sin^{(n)}(0)}{n!}\varphi^n \tag{5}$$

Распишем производные синуса и косинуса по выкладке (4):

$$\cos^{(n)}(0) + i\sin^{(n)}(0) = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2}[e^{i\varphi}]^{(n)} + \frac{1-(-1)^n}{2}[e^{i\varphi}]^{(n)} = [e^{i\varphi}]^{(n)}(\frac{2-((-1)^{n+1}-(-1)^n)}{2}) \tag{6}$$

Для любых целых неотрицательных n выполняется: $(-1)^{n+1} + (-1)^n = 0$. Получили:

$$\cos^{(n)}(0) + i\sin^{(n)}(0) = [e^{i\varphi}]^{(n)} \tag{7}$$

Доказали равенство соответствующих членов разложения в ряд Тейлора-Маклорена:

$$(cos\varphi + i\sin\varphi)_n = (e^{i\varphi})_n \tag{8}$$

Доказали формулу Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{9}$$