

Формула сдвига

$$l(D)(ye^{\mu x}) = e^{\mu x}l(D + \mu)y \quad (1)$$

При этом:

$$l(D) = D^n + a_1D^{n-1} + \dots + a_{n-1}D + a_n \quad (2)$$

$$l(D + \mu) = (D + \mu)^n + a_1(D + \mu)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(D + \mu) + a_n \quad (3)$$

Доказательство:

Фиксируем $k = 0..n$ и докажем, что $D^k(ye^{\mu x}) = e^{\mu x}(D + \mu)^k y$. По формуле Лейбница:

$$D^k(ye^{\mu x}) = (ye^{\mu x})^{(k)} = \sum_{j=0}^k C_k^j (e^{\mu x})^{(j)} y^{(k-j)} = e^{\mu x} \sum_{j=0}^k C_k^j \mu^j y^{(k-j)} = e^{\mu x}(D + \mu)^k y \quad (4)$$

Распишем линейную комбинацию:

$$\sum_{k=0}^n a_{n-k} D^k(ye^{\mu x}) = e^{\mu x} \sum_{k=0}^n a_{n-k} (D + \mu)^k y \quad (5)$$

Получили формулу сдвига:

$$l(D)(ye^{\mu x}) = e^{\mu x}l(D + \mu)y \quad (6)$$