Экспонента с мнимым показателем

Определение:

$$\lambda = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}, \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$$e^{\lambda} = e^{\lambda}(\cos\beta + i\sin\beta) \tag{2}$$

$$e^{\lambda x} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R} \to e^{\lambda x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) \tag{3}$$

– Комплекснозначная функция вещественного аргумента.

$$f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C} = U(x) + iV(x) \tag{4}$$

$U(x), V(x)$ – вещественная и мнимая компоненты $f(x)$. $f(x)$ считается дифференцируемой/интегрируемой, если U и V дифференцируемы/интегрируемы.

Свойства:

1) $e^{\lambda_1}e^{\lambda_2} = e^{\lambda_1+\lambda_2}$, $\forall\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

2) $\frac{d}{dx}(e^{\lambda x}) = \lambda e^{\lambda x}$, $\forall\lambda \in \mathbb{C},\ \forall x \in \mathbb{R}$

3) $\int_0^{x_0} e^{\lambda x}dx = \frac{e^{\lambda x_0}-1}{\lambda}$, $\forall\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0,\ \forall x_0 \in \mathbb{R}$

Доказательство второго свойства:

$$\lambda = \alpha + \beta i, \;\; x \in \mathbb{R} \tag{5}$$

$$e^{\lambda x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x \tag{6}$$

$$\frac{d}{dx}(e^{\alpha x}) = (e^{\alpha x}\cos\beta x)' + i(e^{\alpha x}\sin\beta x)' = (\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x) + i(\alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x) = \tag{7}$$

$$= e^{\alpha x}\cos\beta x(\alpha + \beta i) + i(e^{\alpha x}\sin\beta x(\alpha + \beta i)) = \lambda e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = \lambda e^{\lambda x} \tag{8}$$