Диэлектрики

Диэлектриками являются вещества с ничтожно малым количеством свободных носителей заряда, т.е. почти не проводящие ток.

Каждая молекула вещества содержит некоторое количество зарядов. У некоторых молекул эти заряды разнесены на некоторое расстояние друг от друга. Такую молекулу можно считать диполем с моментом $\vec{p}$. Молекулы такого рода называют полярными. У неполярных молекул – наоборот, заряды в среднем сконцентрированы в одной точке ($\vec{p} = 0$).

Диэлектрик как с полярными, так и с неполярными молекулами взаимодействует с внешним электрическим полем. Полярные молекулы, являясь диполями, стремятся повернуться в направлении поля (им мешает тепловое движение). Неполярные же молекулы поляризуются: их заряды под действием поля расходятся на некоторое расстояние и у молекулы появляется ненулевой дипольный момент $\vec{p}$. Дипольный момент молекулы равен:

$$\vec{p} = \sum_i q_i < \vec{r}_i > \tag{1}$$

Требуется связать дипольный момент молекулы с напряженностью поля. Для этого вводится коэффициент пропорциональности $\beta\varepsilon_0$:

$$\vec{p} = \beta\varepsilon_0\vec{E} \tag{2}$$

Величина β называется поляризуемостью молекулы.

Дипольный момент молекулы – микрохарактеристика. Чтобы охарактеризовать диэлектрик в целом, нужно ввести что-то вроде "плотности дипольного момента". Такая величина носит название поляризованности диэлектрика:

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{\Delta V}\vec{p} \tag{3}$$

Вообще говоря, поляризованность может быть непостоянной – зависеть от точки внутри диэлектрика, взятого объема ΔV. Если она зависит только от величины взятого объема, диэлектрик называется изотропным.

Для изотропных диэлектриков можно ввести характеристику, связывающую поляризованность с напряженностью электрического поля. Она называется диэлектрической восприимчивостью диэлектрика $\varkappa$:

$$\vec{P} = \varkappa\varepsilon_0\vec{E} \tag{4}$$

Сопоставим выражения для β и $\varkappa$:

$$\sum_{\Delta V}\vec{p} = n\Delta V\beta\varepsilon_0\vec{E} \tag{5}$$

$$\vec{P} = n\beta\varepsilon_0\vec{E} \tag{6}$$

$$\varkappa = n\beta \tag{7}$$

Связали макро- и микрохарактристику поляризации диэлектрика через концентрацию молекул.

Выражения для β и $\varkappa$ верны как в случае полярных, так и в случае неполярных молекул.

Молекулы диэлектрика изменяют электрическое поле, в которое он помещен, потому что, имея дипольный момент, создают собственное поле. Таким образом, результирующее поле складывается из двух:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \tag{8}$$

(Поле в отсутствие диэлектрика обозначим через $\vec{E}_0$, поле, создаваемое диэлектриком – через $\vec{E}'$)

Заряды, создающие поле $\vec{E}_0$ называются сторонними или свободными, а те, которые создают $\vec{E}'$ – связанными.

В объеме диэлектрика молекулы-диполи выстраиваются так, что почти не действуют на внешнее поле (ибо отрицательные заряды стремятся расположиться близко к положительным – нейтрализовать их). Отсюда следует, что поле E' создают связанные заряды, выступившие на поверхность диэлектрика.

Найдем заряд, выступающий на поверхность диэлектрика. Для этого представим диэлектрическую стенку некоторой толщины. Вектор $\vec{P}$ имеет в ней постоянное направление. Построим косой цилиндр с основаниями площади ΔS, лежащими на двух поверхностях нашей стенки. Пусть образующие цилиндра параллельны вектору $\vec{P}$. Объем цилиндра:

$$\Delta V = l\Delta S\cos\alpha \tag{9}$$

Здесь l – длина образующей, а $\cos\alpha$ – угол между $\vec{P}$ и нормалью к стенке $\vec{n}$.

Чтобы найти суммарный дипольный момент молекул, заключенных в объеме, умножим его на P:

$$P\Delta V = Pl\Delta S\cos\alpha \tag{10}$$

Наш цилиндр представляет собой диполь с зарядами $+|q| = +|\sigma'|\Delta S$ и $-|q| = -|\sigma'|\Delta S$, где $|\sigma'|$ – модуль поверхностной плотности связанного заряда. Проекция дипольного момента цилиндра на $\vec{P}$ равна заряду, помноженному на расстояние между зарядами:

$$Pl\Delta S\cos\alpha = ql = \sigma'\Delta Sl \tag{11}$$

Отсюда:

$$\sigma' = P\cos\alpha = P_n \tag{12}$$

Расписав P, получим:

$$\sigma' = \kappa\varepsilon_0 E_n \tag{13}$$

На противоположные поверхности нашей стенки под действием внешнего поля выступают заряды с плотностями $+|\sigma'|$ и $|-\sigma'|$. Ясно, что вектор $\vec{P}$ при этом стремится направиться по линиям напряженности внешнего поля.

При включении внешнего поля полярные молекулы стремятся повернуться по полю. Вследствие этого, объемная плотность связанных зарядов ρ' постоянна (т.к. в среднем постоянно расстояние между зарядами). Если внутри такого диэлектрика зафиксировать поверхность, при включении внешнего поля заряд через нее не потечет. Другое дело – диэлектрики с неполярными молекулами.

Найдем объемную плотность связанных зарядов на примере диэлектриков с неполярными молекулами. Для этого внутри диэлектрика выберем косой цилиндр с параллельными $\vec{P}$ образующими длиной $l_1 + l_2$, пересекающий плоскость, параллельную основаниям площади ΔS. Этот цилиндр выберем так, что при включении внешнего поля плоскость внутри него пересекают разноименные заряды из двух частей цилиндра (с образующими l_1 и l_2). Ясно, что эти заряды движутся в разные стороны. Таким образом, плоскость пересекут все заряды, находящиеся в двух объемах: $l_1\Delta S\cos\alpha$ и $l_2\Delta S\cos\alpha$ (ΔS – площадь основания цилиндра, α – угол между $\vec{P}$ и нормалью к поверхности цилиндра $\vec{n}$). Таким образом, после включения поля через плоскость внутри цилиндра пройдет число зарядов $\Delta q'$:

$$\Delta q' = |e|nl_1\Delta S\cos\alpha + |e|nl_2\Delta S\cos\alpha = |e|n(l_1 + l_2)\Delta S\cos\alpha \tag{14}$$

Здесь n – плотность зарядов.

Заряды переносятся попарно: перенос отрицательного заряда в одну сторону сопровождается переносом положительного заряда в другую. Каждую такую пару можно считать диполем. Число пар в единице объема равно n. Дипольный момент каждой пары равен $e(l_1 + l_2)$, а выражение $e(l_1 + l_2)n$ эквивалентно pn, т.е. модулю поляризованности P. Таким образом, получаем:

$$\Delta q' = P\Delta S\cos\alpha = P_n\Delta S = (\vec{P}, \vec{S}) \tag{15}$$

Перейдем от дельт к дифференциалам:

$$dq' = (\vec{P}; d\vec{S}) \tag{16}$$

Отсюда мгновенно следует выражение объемного связанного заряда через поток вектора $\vec{P}$:

$$q'_{out} = \oint_S dq' = \oint_S \vec{P}d\vec{S} \tag{17}$$

Индекс out означает, что q_{out} – заряд, вышедший из объема, ограниченного замкнутой поверхностью S. Само собой, он равен вошедшему заряду с обратным знаком:

$$q'_{in} = -q_{out} = -\oint_S \vec{P}d\vec{S} \tag{18}$$

Наконец, перейдем к объемной плотности зарядов:

$$q'_{in} = \int_V \rho' dV \tag{19}$$

Получаем:

$$\int_V \rho' dV = -\oint_S \vec{P}d\vec{S} \tag{20}$$

(Поверхность S ограничивает объем V)

По теореме Остроградского-Гаусса:

$$\int_V \rho' dV = -\int_V (\vec{\nabla}; \vec{P})dV \tag{21}$$

$$\rho' = -(\vec{\nabla}; \vec{P}) \tag{22}$$

Получили выражение для объемной плотности связанных зарядов в диэлектрике с неполярными молекулами. Величина κ для разных веществ выбирается таким образом, чтобы эта формула была верна и для диэлектриков с полярными молекулами.